Downloadmaterial zum Beitrag „Fadenspiele und das Einmaleins im Kreis“ – MINT *Zirkel* 4-2023

Weitere Berechnungen zu Epizykloiden

Die Zahlen von 1 bis $p-1$ sind gleichmäßig auf dem Rand des Einheitskreises angeordnet. Die Zählung beginnt oben und läuft im Uhrzeigersinn. Zu der Zahl n gehört der folgende Winkel:

$$x = \frac{2\pi n}{p-1}$$

und der zugehörige Punkt hat die Koordinaten $(\sin x, \cos x)$. Ein Strich, der x mit bx verbindet, geht also von $(\sin x, \cos x)$ nach $(\sin bx, \cos bx)$ und ein nahe benachbarter Strich von $(\sin(x+h), \cos(x+h))$ nach $(\sin(b(x+h)), \cos(b(x+h))$.

Für die Kurve, an die alle diese Striche Tangenten sind (die „Einhüllende“), ergibt sich nach umfangreicher Rechnung (man berechne den Schnittpunkt von Strich und benachbartem Strich und lasse dann h gegen 0 gehen) die vergleichsweise einfache Formel:

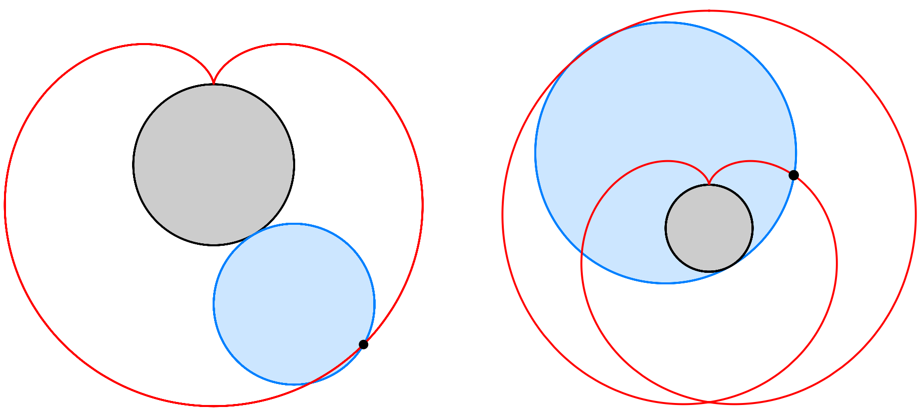
$$f(x) = \frac{b}{b+1}(\sin x, \cos x) + \frac{1}{b+1}(\sin bx, \cos bx)$$

Der zweite Term beschreibt die Rollbewegung des bewegten (äußeren) Kreises. Der hat den Radius

$$\frac{1}{b+1}$$

und läuft mit der b-fachen Geschwindigkeit des ersten Terms. Dieser beschreibt nicht den ruhenden inneren Kreis, auf dem der äußere abrollt, sondern den Mittelpunkt des äußeren Kreises. Der innere hat also den folgenden Radius:

$$\frac{b-1}{b+1}$$



Christoph Pöppe

Für $b = 2$ (links) sind der innere Kreis (grau) und der äußere Kreis (blau) gleich groß. Die Epizykloide, die der Schreibstift (schwarzer Punkt) zeichnet, ist in diesem Fall eine Kardioide (rot). Für $b = 2/3$ (rechts) rollt der äußere Kreis mit seiner Innenseite auf dem inneren ab.

Christoph Pöppe