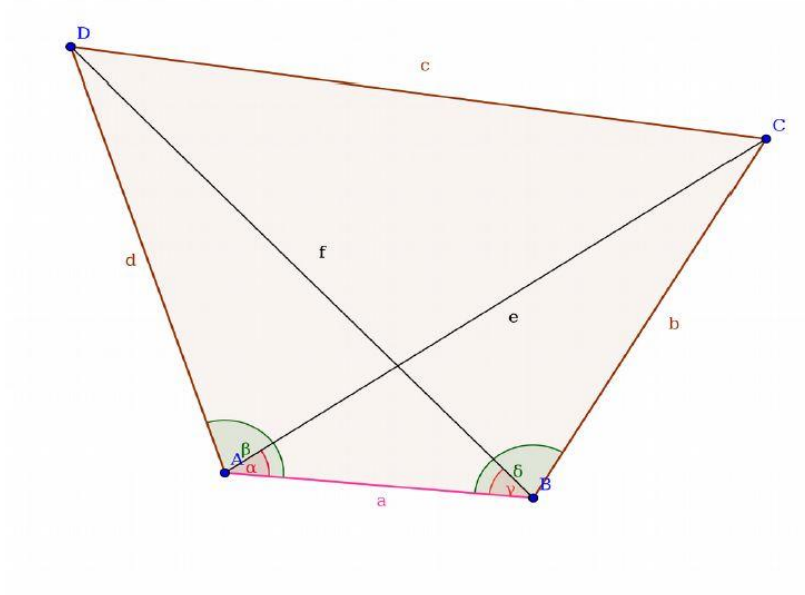
Arbeitsblatt Vermessungen im Gelände

Einführung
Um Straßen, Brücken oder Tunnel zu bauen, muss das Gelände, ein Flusslauf oder Berg vermessen werden. Ein Lineal oder eine Schnur reichen da nicht aus, denn die Entfernungen sind doch ziemlich groß.

Geräte
Messlatten, Maßband, Nivelliergeräte/Theodolithen und Taschenrechner.

Aufgabe 1
Die Entfernung zweier Sendemasten (oder auch Türme, markante Bäume) sind zu ermitteln, wo bei die Ziele nicht direkt zugänglich sind. In der Zeichnung ist das die Entfernung von C nach D. Die Entfernung (Basislänge) von A nach B ist mit Hilfe der Messlatten oder des Maßbandes bestimmbar. Die eingezeichneten Winkel werden mit dem Theodolithen ermittelt*.



Zur Berechnung: Überlegung c ist eine Seite, die in mehreren Dreiecken enthalten ist, so gilt es also eines auszuwählen. Hier wird die folgende Entscheidung getroffen: ACB

Schritt 1:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sin\delta}{\sin(180° - (\alpha + \delta))}$$

$$e = \frac{\sin\delta}{\sin(180° - (\alpha + \delta))} \cdot a$$

Schritt 2:

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin(180° - (\gamma + \beta))}$$

$$d = \frac{\sin\gamma}{\sin(180° - (\gamma + \beta))} \cdot a$$

Schritt 3:

$c = \sqrt{d^2 + e^2 - 2\mathrm{de} \cdot \cos(\beta - \alpha)}$ fertig!

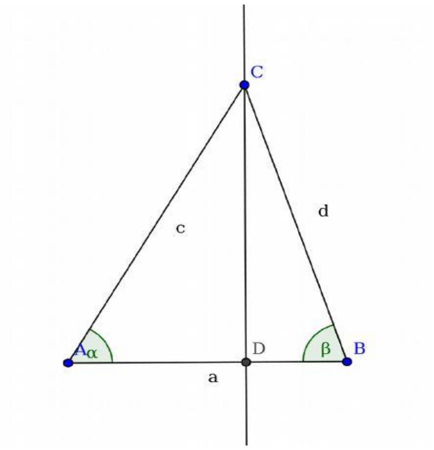
Aber es geht alternativ auch so:

$$c = \sqrt{(\frac{\sin\gamma}{\sin(180° - (\gamma + \beta))} \cdot a)^2 + (\frac{\sin\delta}{\sin(180° - (\alpha + \delta))} \cdot a)^2 - 2(\frac{\sin\gamma}{\sin(180° - (\gamma + \beta))} \cdot a)(\frac{\sin\delta}{\sin(180° - (\alpha + \delta))} \cdot a) \cdot \cos(\beta - \alpha)}$$

$$c = \sqrt{(\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \beta)} \cdot a)^2 + (\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)} \cdot a)^2 - 2(\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \beta)} \cdot a)(\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)} \cdot a) \cdot \cos(\beta - \alpha)}$$

$$c = a \cdot \sqrt{(\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \beta)})^2 + (\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)})^2 - 2(\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \beta)})(\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)}) \cdot \cos(\beta - \alpha)}$$

Aufgabe 2
Gegeben sind die Strecke AB und die eingezeichneten Winkel (beide sind kleiner als 90°). Gesucht ist der Abstand des Punktes C von AB. Überlegung: Der Abstand ist eine Höhe und entspricht der Strecke CD. Der Abschnitt AD sei x, der Abschnitt DB sei y. Dann lässt sich Folgendes herleiten:



$$tan\alpha = \frac{h}{x} tan\beta = \frac{h}{y} \rightarrow$$
$$x = \frac{h}{\tan\alpha} y = \frac{h}{\tan\beta} \rightarrow$$
$$\frac{h}{\tan\alpha} + \frac{h}{\tan\beta} = c | \cdot tan\alpha tan\beta$$
$$h \cdot tan\beta + h \cdot tan\alpha = tan\alpha tan\beta \cdot c$$
$$h(tan\beta + tan\alpha) = tan\alpha tan\beta \cdot c$$
$$h = \frac{\tan\alpha\tan\beta \cdot c}{(\tan\beta + \tan\alpha)}$$

Aufgabe 3
Berechnung der Höhe eines Baumes oder Turmes, dessen Entfernung aus Aufgabe 1 bzw. 2 bekannt ist. Hierzu gilt es, die Formeln zu entwickeln.

Aufgabe 4
Bevor es ins Gelände geht, sollte die Aufgabe 1 mit folgenden Werten durchgerechnet werden:
$\alpha = 54{,}006° \beta = 106{,}860° \gamma = 71{,}264° \delta = 123{,}175° a = 6{,}00 m.$
Die Berechnung kann mit dem Taschenrechner oder mittels Tabellenkalkulation durchgeführt werden.

* Zu beachten ist, dass die Theodoliten Winkel in Neugrad liefern. (Der rechte Winkel ist also 100 gon groß).