

Musterlösungen und ergänzende Informationen zu dem Artikel „Plant for the planet – Fermi-Aufgaben zur Veranschaulichung von CO₂-Emissionen“

Hinweise zum Gebrauch der folgenden Aufgaben:

Den Schülerinnen und Schülern können vollständige Rechnungen vorgeführt werden, oder man lässt sie selber rechnen und stellt Informationen in Form von Hilfekarten zur Verfügung. Die Aufgaben eignen sich besonders gut für fächerübergreifenden Unterricht, u. a. Verwendung der physikalischen Größen Kraft, Druck und Masse; Einheitenrechnung; technische Systeme zur Energieumwandlung; chemische Zusammensetzung der Erdatmosphäre; Thematisierung der Photosynthese oder auch politischer Fragen.

1. Umrechnung der geförderten Braun- und Steinkohle in äquivalente Waldflächen

Frage: Wie groß muss eine Waldfläche sein, die so viel Kohlenstoff speichert, wie in Form von Braunkohle pro Jahr in Deutschland gefördert wird?

Rechnung: Für den Wald in Bayern findet man die Angabe, dass Bäume 27,78 kg Kohlenstoff pro Quadratmeter speichern (<https://www.waldwissen.net>; bei Regenwäldern liegt der Wert zwischen 12 und 40 kg). Im Jahr 2016 wurden in Deutschland 171,5 Millionen Tonnen (= $1,715 \times 10^{11}$ kg) Braunkohle mit einem durchschnittlichen Kohlenstoffanteil von 60 Prozent gefördert.

Menge des Kohlenstoffs: $1,715 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot 0,6 = 1,029 \cdot 10^{11} \text{ kg}$.

Umrechnung in Quadratmeter (ein Quadratmeter Waldfläche pro 27,78 kg Kohlenstoff):

$$1,029 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{27,78 \text{ kg}} = 3,7 \cdot 10^9 \text{ m}^2.$$

Antwort: Die Größe der Waldfläche beträgt also 3,7 Milliarden Quadratmeter oder 3.700 Quadratkilometer ($1 \text{ km}^2 = (1000 \text{ m})^2 = 1.000.000 \text{ m}^2$).

Zum Vergleich: Das Ruhrgebiet hat eine Ausdehnung von 4.435 Quadratkilometern und ist somit nur wenig größer.

Die weltweite Steinkohleförderung betrug im Jahr 2014 7.153 Millionen Tonnen ($7,153 \cdot 10^{12}$ kg). Da es sich bei Steinkohle in guter Näherung um reinen Kohlenstoff handelt, gilt:

$$7,153 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{27,78 \text{ kg}} = 2,57 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$$

$$2,57 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 = 257.487 \text{ km}^2$$

Dies ist eine Fläche etwa halb so groß wie Frankreich (643.801 km²).

2. Ausweitung der Waldflächen

Frage 1: Welche Waldfläche wäre erforderlich, um so viel Kohlenstoff zu binden, damit wieder die vorindustrielle CO₂-Konzentration erreicht wird?

Frage 2: Wie viel Kohlenstoff steckt in dem atmosphärischen CO₂ in einer Luftsäule mit einem Quadratmeter Grundfläche?

Rechenweg: Die Beantwortung von Frage 1 setzt eine Antwort auf Frage 2 voraus. Die CO₂-Konzentration betrug in vorindustrieller Zeit bei 280-300 ppm, heutzutage aber bereits 400 ppm. „ppm“ steht für „parts per million“ (ein Millionstel) und bezieht sich in diesem Kontext auf das Volumen von Luft. Der CO₂-Anteil in z. B. einem Kubikmeter Luft beträgt also 400 Millionstel (=0,4 ‰ = 0,04%). [Anmerkung: Die Zusammensetzung der Luft ist bis in eine Höhe von 100 km recht konstant, auch wenn der Luftdruck mit zunehmender Höhe sinkt.]

Benötigt wird aber eine Massenangabe für Kohlenstoff. Daher wird zunächst aus dem Volumenanteil der zugehörige Massenanteil berechnet: Einem Tabellenwerk kann entnommen werden, dass die Dichte von CO₂ um 50 Prozent größer ist als die von Luft (die Plausibilität zeigt sich durch einen Vergleich der atomaren Massen von N₂, dem Hauptbestandteil von Luft, und CO₂: Das Verhältnis beträgt 44u:28u = 1,57, was einer um 57 Prozent größeren Dichte entspricht).

Daraus folgt, dass der aktuelle CO₂-Massenanteil bei 600 ppm liegt. Für die Umrechnung in einen absoluten Wert wird zunächst die Masse einer Luftsäule mit einem Quadratmeter Grundfläche benötigt. Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt rund 1 bar oder 100.000 Pascal (Pa), wobei Druck definiert ist als Kraft (senkrecht zur Fläche) durch Fläche. Unter Verwendung des Ausdrucks für die Gewichtskraft ergibt sich eine Masse von rund 10.000 kg pro Quadratmeter Fläche, d. h. auf jeden Quadratmeter der Erde drücken 10 t Luft:

$$p = \frac{F_g}{1\text{m}^2} = \frac{mg}{1\text{m}^2} \Leftrightarrow m = \frac{p \cdot 1\text{m}^2}{g} = \frac{100.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1\text{m}^2}{9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 10.194 \text{N} \frac{\text{kg}}{\text{N}} = 10.194 \text{kg}.$$

Damit entspricht ein CO₂-Massenanteil von 600 ppm einer Masse von 6 kg pro Quadratmeter, und die Masse des Kohlenstoffs 1,5 kg (12 atomare Masseneinheiten für Kohlenstoff und 2 × 16 Masseneinheiten für den Sauerstoff).

Antwort 2: Das atmosphärische CO₂ in einer Luftsäule mit einem Quadratmeter Grundfläche besteht aus 1,5 kg Kohlenstoff.

Fortsetzung der Rechnung: Für eine Reduktion von 400 auf 300 ppm sind also $\frac{100 \text{ ppm}}{400 \text{ ppm}} \cdot 1,5 \text{ kg} = 0,375 \text{ kg}$ pro Quadratmeter Erdoberfläche aus der Atmosphäre zu entfernen,

oder insgesamt: $510.000.000 \text{ km}^2 \cdot 0,375 \text{ kg/m}^2 (=1,9 \cdot 10^{14} \text{ kg})$. (I)

Geht man wieder von dem Wert von $27,78 \text{ kg/m}^2$ für den in Wäldern gespeicherten Kohlenstoff aus, beträgt der Kohlenstoffgehalt einer Waldfläche, die einen Bruchteil f der Erdoberfläche bedeckt

$$f \cdot 510.000.000 \text{ km}^2 \cdot 27,78 \text{ kg/m}^2 \quad . \quad (\text{II})$$

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke I und II lässt sich f bestimmen:

$$f = \frac{510.000.000 \text{ km}^2 \cdot 0,375 \text{ kg/m}^2}{510.000.000 \text{ km}^2 \cdot 27,78 \text{ kg/m}^2} = 1,34\% \approx 1,5\% .$$

Der absolute Wert beträgt $1,5\% \cdot 510.000.000 \text{ km}^2 = 7.650.000 \text{ km}^2$, 21,4-mal größer als die Fläche von Deutschland (357.386 km^2) und um 73 Prozent größer als die Fläche der EU ($4.423.000 \text{ km}^2$). Die aufzuforstende Fläche kann auch in Bezug gesetzt werden zu der auf der Erde bereits vorhandenen Waldfläche. Das Festland, das etwa 30 Prozent der Erdoberfläche ausmacht, ist zu etwa 30% bewaldet. Dies ergibt eine Fläche von $30\% \cdot 30\% \cdot 510.000.000 \text{ km}^2 = 45.900.000 \text{ km}^2$.

Antwort Frage 1: Der notwendige Zuwachs beträgt also $7.650.000 \text{ km}^2 / 45.900.000 \text{ km}^2 = 17\%$ bezogen auf die bereits vorhandene Waldfläche.

3. Reduzierung fossiler Energien

Frage: Wie groß müsste eine mit Solarzellen bedeckte Fläche auf der Erde sein, die den Weltenergiebedarf deckt? Und: In welcher Zeit erhält die gesamte Erde von der Sonne die Energie, die von den Menschen in einem Jahr verbraucht wird?

Rechnung: Wikipedia gibt für den Weltenergiebedarf im Jahr 2010 einen Wert von rund 500 Exajoule an (1 Exajoule = 10^{18} Joule). Dies entspricht einer Leistung von

$$P = \frac{500 \cdot 10^{18} \text{ J}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ W}$$
 oder rund 2 kW pro Mensch. Für einen Vergleich mit der Energie, die die Erde von der Sonne erhält, wird die sog. Solarkonstante herangezogen, die langjährig gemittelte Bestrahlungsstärke ohne Atmosphäre, $E_0 = 1.367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Beschrieben wird die Querschnittsfläche der Erde $A = \pi (6.371 \text{ km}^2) = 1,275 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$. Damit

ergibt sich eine Leistung von $P_s = 1.367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 1,275 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 = 1,7 \cdot 10^{17} \text{ W}$. Mit dieser Leistung

wird eine Energiemenge von 500 Exajoule in nur $W = P \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{W}{P} = \frac{500 \cdot 10^{18} \text{ J}}{1,7 \cdot 10^{17} \text{ W}} = 2941 \text{ s}$, also

in weniger als einer Stunde übertragen.

Bei einem Wirkungsgrad der Solarzellen von zehn Prozent käme man auf rund **acht Stunden**. Auf der Erdoberfläche steht aber nicht die gesamte Energie zur Verfügung. In Afrika sind es über ein ganzes Jahr - sowie Tag und Nacht - gemittelt nur 300 W. Die Wert entstammt einem Solaratlas, lässt sich aber überschlägig prüfen: Die Solarkonstante reduziert sich bei einer durchschnittlichen Nachtdauer von zwölf Stunden um den Faktor 2, und aufgrund der täglichen Veränderung des Sonnenstands nochmal um den Faktor 2, ergibt 342 W. Auch kommerzielle Solarzellen erreichen inzwischen einen Wirkungsgrad von 20 Prozent. Da aber bei hohen Temperaturen der Wirkungsgrad sinkt, ist ein Wirkungsgrad von 10 Prozent realistischer, womit die effektive elektrische Leistung 30 Watt pro Quadratmeter beträgt. Daraus resultiert ein Flächenbedarf von

$$A = \frac{1,6 \cdot 10^{13} \text{ W}}{30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 5,33 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 = 533.333 \text{ km}^2$$
, vergleichbar mit der Fläche des Südsudans (619.745 km²).

Antwort: Es müsste eine Fläche etwa so groß wie der Südsudan mit Solarzellen bedeckt werden (oder ein Quadrat mit der Kantenlänge von 730 km), um den Energiebedarf der Erde zu decken. In nur acht Minuten erhält die Erde von der Sonne die Energie, die in einem ganzen Jahr benötigt wird.

4. Zusätzliche Fermiaufgabe

Ca. 200 Milliarden Tonnen Kohlenstoff müsste der Atmosphäre entzogen werden, um die CO₂-Konzentration wieder auf ein vorindustrielles Maß zu senken.

Frage: Bis zu welcher Höhe ließe sich die Fläche von Deutschland mit diesem Kohlenstoff bedecken? Die allgemeinere Aufgabe besteht darin, eine Umrechnung einer CO₂-Konzentration in eine **imaginäre Kohleschicht** vorzunehmen.

Rechnung: Sie entspricht im Wesentlichen der zur Ausweitung der Waldfläche. Der Anteil des Gases CO₂, das insbesondere bei der Verbrennung von Kohle entsteht, in der Atmosphäre liegt zurzeit bei etwa 400 ppm (Teile pro Millionen), wobei sich dieser Wert wie allgemein üblich auf das Volumen bezieht. Dieser ist zu vergleichen mit 300 ppm in der vorindustriellen Zeit. Die Dichte von CO₂ ist um 50 Prozent größer als die von Luft, so dass der aktuelle CO₂-Massenanteil bei 600 ppm liegt. Um den genannten Wert von 25 cm für die Schichtdicke zu erhalten, geht man aus vom Luftdruck auf Meereshöhe: rund 1 bar oder 100.000 Pascal (Pa). Dieser Druck entspricht einer Masse von 10.000 kg pro Quadratmeter. Der CO₂-Massenanteil davon beträgt 600 ppm, also sechs kg pro Quadratmeter und der Kohlenstoffanteil 1,5 kg (12 atomare Masseneinheiten für Kohlenstoff und 2 × 16 Masseneinheiten für den Sauerstoff). Mit der Dichte von 2.200 kg/m³ ergibt das die Masse einer nur 0,75 mm dünnen, die gesamte Erde bedeckenden Kohlenstoffschicht (Flächeninhalt 510.000.000 km²; dieser lässt sich aus dem mittleren Erdradius von 6.371 km und der Oberfläche einer Kugel berechnen:

$$4\pi r^2 = 4\pi (6.371\text{km})^2 = 510.064.472\text{km}^2) \text{ oder rund 800 Milliarden Tonnen Kohlenstoff.}$$

Bezogen auf Deutschland mit einer Fläche von 357.386 km² würde die Schichtdicke rund 1 m betragen. Für die Rückkehr zu einer vorindustriellen Situation müsste sie um etwa 25 cm verringert werden.

Zum Vergleich:

Mit den Zahlenwerten zu den jährlichen Fördermengen und deren Beschreibung durch eine exponentielle Zunahme ab dem 19. Jahrhundert kommt man auf 240 Milliarden Tonnen Steinkohle, die seitdem gefördert wurden. Kohlenstoffdioxid entsteht aber auch aus der Verbrennung von Braunkohle und Erdöl. Dieses zusätzliche CO₂ ist in Kohlenstoffsinken, wie den Ozeanen, „verschwunden“. Die globale Biomasseproduktion, für die Algen etwa zu 50 Prozent verantwortlich sind, wird auf 100 Milliarden Tonnen Kohlenstoff pro Jahr geschätzt. Allerdings erfolgt auch eine Zersetzung von Biomasse in einem ähnlichen Umfang. Die anthropogenen, also menschengemachten CO₂-Emissionen stören dieses natürliche Gleichgewicht.

Antwort: Mit dem überschüssigen Kohlenstoff in der Atmosphäre könnte die Fläche von Deutschland mit einer 25 cm dicken Schicht überzogen werden.

Ergänzungen vom 06.07.2019:

Nach aktueller Schätzung gibt es weltweit 3 Billionen Bäume, siehe

<https://www.nature.com/news/trillions-of-trees-1.18333> und

<https://www.nature.com/news/global-count-reaches-3-trillion-trees-1.18287>. Ein Hinweis auf diese Seite fand sich auf:

https://www.wsl.ch/dendro/junior/wald/anzahl_baeume_weltweit/index_DE

Die 17%-ige Ausweitung der Waldfläche hieße demnach, dass pro Mensch 70 neue Bäume gepflanzt werden müssten.

Übersicht über Aufforstungs-Initiativen:

<https://www.trilliontreecampaign.org/donate-trees>

Zum tatsächlichen Potential für eine weltweite Aufforstung ist inzwischen eine Studie veröffentlicht worden, siehe:

<https://www.spiegel.de/wissenschaft/natur/waelder-koennten-zwei-drittel-der-menschengemachten-co2-belastung-ausgleichen-a-1275799.html>

„Klimakrise: Wälder könnten zwei Drittel der menschengemachten CO₂-Belastung ausgleichen - Der Mensch ist für 300 Milliarden Tonnen zusätzlichen Kohlenstoff in der Atmosphäre verantwortlich. Zu viel, um die globale Temperatur stabil zu halten. Doch die Natur bietet eine Möglichkeit, die Klimakrise aufzuhalten. Von Thorsten Dambeck“;
„Der Studie zufolge könnten beim derzeitigen Klima theoretisch 4400 Millionen Hektar Wald auf der Erde stehen. 900 Millionen Hektar davon würden weder für die Landwirtschaft noch für menschliche Siedlungen benötigt: Damit stünde ein Gebiet von der Größe der USA für Wald zur Verfügung.“

Original-Veröffentlichung: <https://science.sciencemag.org/content/365/6448/76>

The global tree restoration potential, Jean-Francois Bastin, Yelena Finegold, Claude Garcia, Danilo Mollicone, Marcelo Rezende, Devin Routh, Constantin M. Zohner, Thomas W. Crowther; Science 05 Jul 2019: Vol. 365, Issue 6448, pp. 76-79, DOI: 10.1126/science.aax0848

Anmerkungen:

- Die 300 Milliarden Tonnen liegen oberhalb der hier berechneten 200 Milliarden Tonnen. In der Originalveröffentlichung wird ein Wert von umgerechnet 240 Milliarden Tonnen für das Jahr 2011 angegeben. Eine Anfrage bei den Autoren hat ergeben, dass der weitere Anstieg der CO₂-Konzentration berücksichtigt wurde. Der Anstieg von 400 auf 415 ppm bedeutet eine Zunahme des überschüssigen CO₂ um 13,6%, wenn die vorindustrielle CO₂-Konzentration mit 290 ppm angesetzt wird:

$(415\text{ppm}-290\text{ppm})/(400\text{ppm}-290\text{ppm})=125\text{ppm}/110\text{ppm}=113,6\%$.

Aus 240 werden damit 273 Milliarden Tonnen CO₂, die zu 300 aufgerundet wurden.

- 4400 Millionen Hektar Wald sind umgerechnet 44 Millionen Quadratkilometer. Dies stimmt ziemlich gut mit dem Wert von 45,9 Millionen Quadratkilometer aus der obigen Rechnung überein. Der erste Wert bezieht sich aber auf die theoretisch mögliche und der zweite auf die tatsächlich vorhandene Waldfläche.

- Auf der Erdoberfläche würden mit 9 Millionen Quadratkilometer sogar mehr als die laut obiger Rechnung benötigten 7,65 Millionen Quadratkilometer zur Verfügung stehen.

Überprüfung der CO₂-Uhr:

Nach dem aktuellen Stand der CO₂-Uhr (<https://www.mcc-berlin.net/de/forschung/co2-budget.html>, aufgerufen am 14.07.2019) beträgt das verbleibende CO₂-Budget 355,638 Milliarden Tonnen. Die molare Masse von CO₂ beträgt 44 g/mol, die molare Masse von Kohlenstoff 12 g/mol. Das entsprechende Kohlenstoff-Budget beträgt damit rund 97 Milliarden Tonnen. Pro Sekunde kommen 1331 Tonnen CO₂, oder 363 Tonnen Kohlenstoff hinzu. Das Budget wäre somit tatsächlich nach etwas mehr als 8 Jahren (Stand Mitte 2019) aufgebraucht.

Seit Beginn der Industrialisierung wurde schon ein Anstieg um 1 Grad erreicht. Ein Anstieg auf 1,5° entspricht einer relativen Zunahme von 50%. Nimmt man vereinfachend an, dass der Temperaturanstieg und der CO₂-Gehalt der Atmosphäre direkt proportional sind, würde sich bei aktuell 270 Mrd. t überschüssigem Kohlenstoff ein Rest-Budget von $1,5 \times 270 - 270 = 135$ Mrd. t ergeben. Dieser Wert bezieht sich auf die Menge an CO₂, die in der Atmosphäre verbleibt, und nicht auf die emittierte Menge CO₂. Gegenwärtig werden 50% des von Menschen verursachten CO₂ durch natürliche Prozesse gebunden. Wenn das so bliebe, könnten noch 270 Mrd. t CO₂ emittiert werden und nicht bloß 97 Mrd. t. Der Unterschied wäre damit erklärbar, dass von einer deutlich nachlassenden Fähigkeit zur CO₂-Aufnahme ausgegangen wurde. Damit würde sich die Prognose auf der sicheren Seite befinden.